[3] إذا كانت $f$ ذات تغير محدود على الفترة $[a,b]$ فتكون أيضاً ذات تغير محدود على أية فترة جزئية منها مثل:

$$[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$$

ويكون عندئذ:

$$\overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}}(f) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

وهذا ينتج من التعريف وملاحظة سابقة مباشرة.

- دقة وخشونة التجزئة:

نقول عن التجزئة $P_1$ للفترة $[a,b]$ إنها أدق أو أنعم أو أقوى من التجزئة $P_2$ لنفس الفترة إذا كانت $P_2 \subset P_1$. كما نقول أيضاً أن التجزئة $P_2$ أخشن أو أضعف من $P_1$.

مثال: $P_1 = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$

المجموعة الجديدة $P_2$ وبالإضافة $P_1 \subset P_2$.

$-\infty$ $x_0 = a$ $x_1$ $0$ $x_n = b$ $\infty$

إذا أخذنا الفترة $[0,1]$ فإن كلاً من $P_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

$P_2 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$

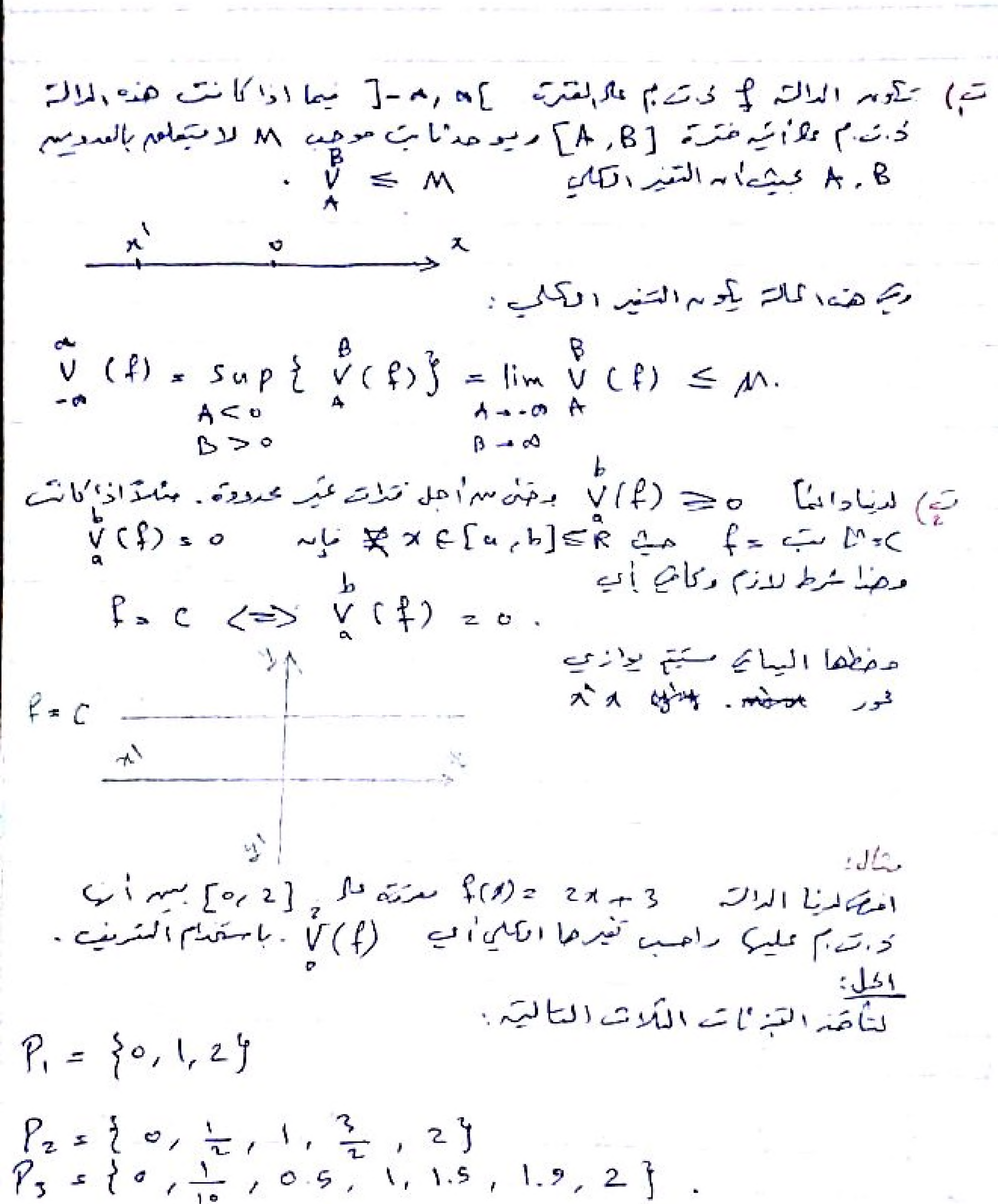
~~[illegible]~~ تجزئة لهذه الفترة حيث:

$$P_1 \subset P_2$$

لاحظ هنا من خلال المثال السابق أنه $P_1 \subset P_2$ إلا أن $\lambda(P_1) \geq \lambda(P_2)$
إلا أنه العكس ليس صحيحاً.

نعود إلى الدوال محدودة التغير:

ملاحظات:



ت) تكون الدالة $f$ ذ.ت.م على الفترة $]-\infty, \infty[$ فيما اذا كانت هذه الدالة ذ.ت.م على أية فترة $[A, B]$ ويوجد ثابت موجب $M$ لا يتعلق بالعددين $A, B$ بحيث أن التغير الكلي $\bigvee_{A}^{B} \le M$ .



وفي هذه الحالة يكون التغير الكلي :

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty}(f) = \sup_{\substack{A<0 \\ B>0}} \left\{ \bigvee_{A}^{B}(f) \right\} = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to \infty}} \bigvee_{A}^{B}(f) \le M.$$

ث) لدينا دائما $\bigvee_{a}^{b}(f) \ge 0$ بغض النظر عن أجل دالات غير محدودة. مثلا اذا كانت $f =$ ثابت $= M = C$ حيث $\forall x \in [a,b] \subseteq R$ فإن $\bigvee_{a}^{b}(f) = 0$
وهذا شرط لازم وكافي أي

$$f = C \iff \bigvee_{a}^{b}(f) = 0 .$$

وخطها البياني مستقيم يوازي محور $x'x$ .



مثال:
افحص لدينا الدالة $f(x) = 2x + 3$ معرفة على $[0, 2]$ بين أنها ذ.ت.م عليها واحسب تغيرها الكلي أي $\bigvee_{0}^{2}(f)$ . باستخدام التعريف .

الحل:
لنأخذ التجزئات الثلاث التالية :

$P_1 = \{0, 1, 2\}$

$P_2 = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$

$P_3 = \{0, \frac{1}{10}, 0.5, 1, 1.5, 1.9, 2\}$ .

بعد كل عدد عادي يوجد عدد غير عادي .

عندئذٍ نشكل المجموع:

$$v(f;P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |\Delta f(x)| = 2(x_n - x_0)$$

حيث الدالة متزايدة تماماً علماً بأن تتفاضل الحدود مع بعضها .

$$= 2(2-0) = 4.$$

وعليه نستنتج 4 مهما جاءت التجزئات .

في هذا المثال: $\Delta f(x) = |f(x_k) - f(x_{k-1})| \geq 0$

ومنه

$$\overset{2}{\underset{0}{V}}(2x+3) = \sup_{P\in \mathcal{P}_{[a,b]}} \{v\} = 4.$$

مثال:

لتكن لدينا الدالة:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 ; & x \in Q = [0,1] \cap Q \\ & ; \quad x \in [0,1]. \\ -1 ; & x \in \tilde{Q} \text{ (مجموعة أعداد غير عادية) } = [0,1] - Q. \end{cases}$$

و $R = Q \cup \tilde{Q}$ .

هذه الدالة تعرف باسم دالة ديرخليه وهي دالة محدودة ولكنها متقطعة في أي نقطة (نقاط انقطاع من النوع الثاني). وهي دالة ليست ذ.ت.م على الفترة $[0,1]$ ولا على $R$ إذا أخذنا التجزئة:

$$\{x_0 = 0, y_1, x_1, y_2, x_2, \dots, y_n, x_n = 1\} = P$$

حيث: $x_1, \dots, x_n$ أعداد نسبية .

$y_1, \dots, y_n$ " غير عادية (غير نسبية) .

ونشكل المجموع التالي:

$$v(\varphi;P) = \sum_{k=1}^{n} |\Delta f(x_k)|$$

$$= |\varphi(y_1) - \varphi(x_0)| + |\varphi(x_1) - \varphi(y_1)| + |\varphi(x_n) - \varphi(y_n)|$$

$$= \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{n \text{ مرة}} = 2n.$$

$\sin n\pi = 0$ $\cos(n+1)\frac{\pi}{2} = 0$

$\sin(2n+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^n$ (نحوطلا cos, sin بالتجزئة يجب ادخال n).

لا يمكن حبل هذا المقدار < M وهذا المقدار غير محدود (أي المجموع) وعندما نكتب:

$\overset{1}{\underset{0}{V}}(q) = \lim_{n\to\infty}(2n) = \infty \Rightarrow$ الدالة ليست ذ.ت.م على [0,1]

ملاحظة:

هذه الدالة ليست محدودة التغير على أية فترة جزئية مغلقة من R وليست ذ.ت.م على R.

مراجعة المثال السابق $P_{n[0,1]}$

$P_n[0,1] = \{ x_0, 0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 \}$ ; $n \in N$

خواص الدالة ذ.ت.م على فترة ما:

لتكن الفترة [a,b] من المستقيم الحقيقي محدودة ومغلقة وللتذكير بخواص هذه الدالة على الفترة $[a,b] \subseteq R$.

$P_1$) اذا كانت f دالة ذ.ت.م على الفترة [a,b] تكون محدودة عليها.

إلا أن العكس غير صحيح بشكل عام.

مثال: دالة ديرخليه محدودة وليست ذ.ت.م. مراجعة أي تجزئة.

{ بالدالة ديرخليه وحيث التجزئة تأخذ أعداد $\in Q$ أو $\notin Q$ }.

الاثبات:

لدينا f ذ.ت.م على [a,b] وللتعادل اثبات $M \geq |f| \; \forall x \in [a,b]$

لتكن $P = \{a, x, b\}$ تجزئة للفترة [a,b] و $a < x < b$.

عندئذ يكون:

$V(f;P) = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$

لأن $\sup V = \overset{b}{\underset{a}{V}}$.

$\Rightarrow \forall x ; a < x < b$

يكون: حسب خواص القيمة المطلقة $f(x) = |\underbrace{f(x) - f(a)}_{+} + f(a)| \leq$

$|f(x) - f(a)| + |\underbrace{f(a)}_{\text{ثابت}}|$

$\overset{b}{V}$ //

$$\leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + |f(a)| = M \Rightarrow |f| \leq M \; ; x \in [a,b]$$

ح، الدالة محدودة على $[a,b]$

كما يمكننا تعميم هذه الخاصية على $R$. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$f_1$: لنتقدم المثال التالي على أنه العكس غير صحيح بشكل عام على الفترة $[a,b]$ كمثال على الدوال ذ.ت.م وهي دوريخليه المحدودة على أي فترة، ولكنها ليست ذ.ت.م على هذه الفترة.

$$\Leftarrow |\varphi| \leq 1 \qquad \varphi \notin BV_{[a,b]} .$$

$P_2$) اذا كانت $f, g$ دالتان ذ.ت.م على الفترة $[a,b]$ عندئذ تكون كل من الدوال التالية ذ.ت.م عليها.

1) $|f|, \; f^2, \; \frac{1}{f} \; ; (|f| \geq \alpha > 0) \; ; \; \alpha . f \; ; \alpha \in R^*$

$f \neq 0$

في الكل $x \in [a,b]$.

2) $\alpha f + \beta g \; , \; f.g \; , \; \frac{f}{g} \; ; (|g| \geq \alpha > 0)$

حيث $\alpha, \beta \in R^*$ ، $x \in [a,b]$.

نتيجة:

اذا كانت $f$ ذ.ت.م على الفترة $[a,b]$ فإن كل من الدوال: $f.f$

$f^2, f^3, \ldots, f^k(x) \qquad (2 \leq k \leq n)$

ذ.ت.م على الفترة $[a,b]$. وكذلك:

$\frac{1}{f^2}, \frac{1}{f^3}, \ldots, \frac{1}{f^k} \; ; \; \left[ \begin{array}{l} x \in [a,b] \\ 2 \leq k \leq n \end{array} \right.$

$\frac{1}{f} \cdot \frac{1}{f^2}$

ليست من.

غير محدود

$(|f| \geq \alpha > 0)$ ,

اثبات أن الدالة $\frac{1}{f}$ ذ.ت.م على $[a,b]$:

بما أن $f$ ذ.ت.م عليها و $|f| \geq \alpha > 0$.

أي $-\alpha \geq f \geq \alpha$

أي $]-\infty, -\alpha] \cup [\alpha, +\infty[$

$$|f| \geq \alpha \Rightarrow \frac{1}{f} \leq \frac{1}{\alpha}$$

لتكن التجزئة :

$$P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$$

ولنشكل المجموع :

$$v\left(\frac{1}{f}; P\right) = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{f(x_k)} - \frac{1}{f(x_{k-1})} \right|$$

بتوحيد المقامات :

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|}{|f(x_k)| \cdot f(x_{k-1})} \rightarrow \text{بالقيمة المطلقة}$$

$$\Rightarrow |f| \geq \alpha > 0 \Rightarrow \frac{1}{|f|} \leq \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \Sigma \leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$\leq \frac{1}{\alpha^2} \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \Rightarrow$$

$\frac{1}{f}$ ذ.ت.م على $[a,b]$ وتغيرها الكلي :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}\left(\frac{1}{f}\right) \leq \frac{1}{\alpha^2} \overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

سؤال للتفكير

أعد تنسيق الطلب برهان : $|f|, f+g, \frac{f}{g}; |g| \geq \alpha > 0$

تحقيق بدل $f$ بـ مثلاً $k \cdot f$ ؛ $k$ أي عدد $\in R$.

($P_5$) إذا كانت $f \in BV[a,b]$ على $[a,b]$ وكان $a < c < b$ فإن هذه الدالة تكون ذ.ت.م على كل من الفترتين $[a,c]$ , $[c,b]$ والعكس صحيح وعندها نكتب :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f).$$

مثال.

مرب نفصل مجال الدالة $f(x) = \sin x \; ; x \in [0, \pi]$

$0 < c = \frac{\pi}{2} < \pi$.

ويمكن تعميم ذلك كنتيجة لهذه الخاصية:

اذا كانت: $a < c_1 < \dots < c_n < b$ تجزئة

للفترة $[a,b]$

وكانت $f \in BV[a,b]$ فانها تكون ذات ت.م على كل من الفترات:

$[a, c_1]$ ، $[c_1, c_2]$ ، ... ، $[c_n, b]$

كل الفترات مغلقة

وتحقق. $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{c_1}{\underset{a}{V}}(f) + \dots + \overset{b}{\underset{c_n}{V}}(f)$.

ملاحظة:

تعمم هذه الخواص على الفترة $]-\infty, \infty[ = R$ حيث $f, g$ دوال ذات ت.م عليها. عندها نحصل على:

1) $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f \pm g) \le \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f) + \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f)$.

2) $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f \cdot g)$ مطلقة

3) $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}\left(\frac{1}{f}\right)$

بالنسبة لـ $f$ يكون لدينا: $-\infty < c < \infty$ ; $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f) = \overset{c}{\underset{-\infty}{V}}(f) + \overset{\infty}{\underset{c}{V}}(f)$.

ملاحظة (تعميم):

اذا كانت $f$ مطردة ومحدودة على الفترة $]-\infty, \infty[$ عندها تكون الدالة $f$ ذات ت.م عليها كمثال الدالة الثابتة معرفة على $R$ بأكمله هي دالة تزايدية او تناقصية كما انها محدودة وبالتالي تكون ذات ت.م.

- الدالة المثلثية غير محدودة. ودالة $\sin$ ذات ت.م على $R$ بأكمله.

الدالة ~~tan~~ ليست محدودة. ويمكن ان تكون ذات ت.م بجوار نقطة.

$\tan$ اما اذا اخذنا: $\tan : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to R$ فستكون

مثال:

الدالة $f(x) = e^x$ على الفترة $]-\infty, \infty[$ ليست ذات ت.م لانها على الاقل ليست محدودة.